令和４年度第１次募集（令和３年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　選　抜

数理物質科学専攻
物理学
Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

１　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

２　問題冊子は，表紙を含めて全部で５ページある。

３　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

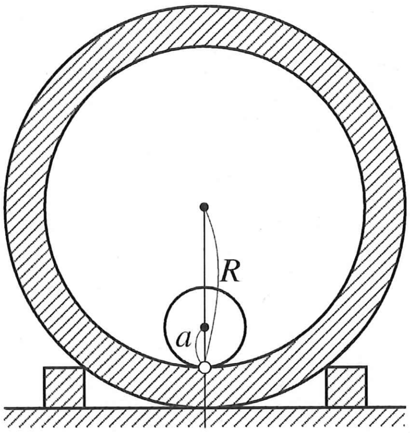
４　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

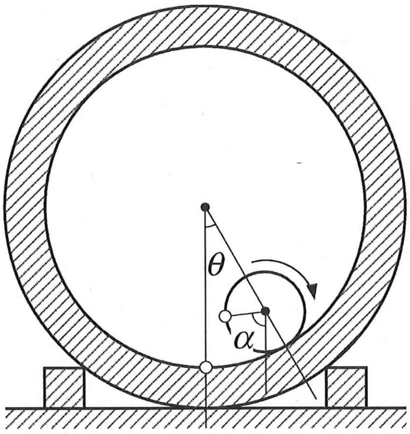
５　解答時間は，１２０分である。

６　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

図のように，水平面上に固定された内径 R の円筒の内側を，半径 a, 質量 M の密度が一様な円柱が滑ることなく転がる場合を考える。左の図は円柱の中心軸が最下点にあるときを示している。黒丸は円筒と円柱の中心軸を示す。白丸は円柱が最下点にあるときの円筒と円柱が接しているところを示す。円柱の軸は最下点を中心にして振動しているものとし，円柱の軸は円筒の軸と平行で，円柱は円筒の内側から離れることはないものとする。右の図は，円柱の軸が鉛直下向きから角度 θ だけ回転したときの様子で，このときの円柱の鉛直下向きからの回転角を α とする。重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視できるものとして，以下の問いに答えよ。





(1) 円柱の中心軸の周りの円柱の慣性モーメントが $\dfrac{Ma^2}{2}$ となることを示せ。

(2) 角度 α と角度 θ の間の関係を表せ。

(3) 角度 θ のときの円柱の位置エネルギーを書け。ただし，位置エネルギーは円柱が最下点にあるときを基準とする。

(4) 問 (2) の結果を用いて，角度 θ のときの円柱の運動エネルギーを $\dot{\theta}$ を用いて表せ。ここで，$\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ である。

(5) ラグランジアン L を書け。

(6) θ に対するラグランジュの運動方程式を書き，θ についての微分方程式を求めよ。

(7) θ が十分に小さい微小振動のとき，円柱の軸は単振動する。この単振動の周期を求めよ。

[2]

(I) 真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

(1) 空間上の任意の位置を $\vec{r} = (x, y, z)$ と表す。$(0, 0, d)$ に置かれている点電荷 $+q$ による電位 $\phi_1(x, y, z)$ を求めよ。ここで，d と q は正の定数である。また，$(0, 0, -d)$ の位置に置かれている点電荷 $-q$ による電位 $\phi_2(x, y, z)$ を求めよ。

原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg d$ のとき，問 (1) の電荷対は電気双極子とみなせる。

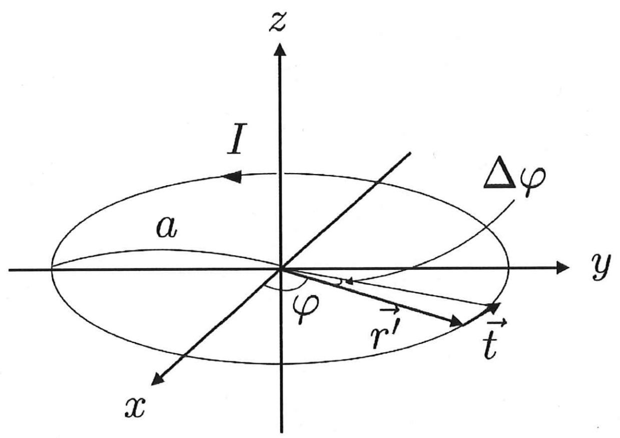
(2) この電気双極子による電位が $\phi_d(x, y, z) = \dfrac{qzd}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$ であることを示せ。ただし，次の近似を用いてもよい。

$$|X| \ll 1 \text{ のとき，} (1 + aX + bX^2)^{-t} \sim 1 - atX \qquad (a, b, t \text{ は任意の定数})$$

(3) 問 (2) の式が原点に置かれた電気双極子モーメント $\vec{p}$ による位置 $\vec{r}$ における電位の一般式 $\phi = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ を満たすことを示せ。

(4) 問 (2) の式を用いて，$r \gg d$ の任意の位置における電場 $\vec{E}$ の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

(II) 真空中に，図のような半径 a，強さ I の円電流が x-y 平面上にある。真空の透磁率を μ_0 として，以下の問いに答えよ。



(1) 電流経路上の位置 $\vec{r'}$ の方位角が φ と $\varphi + \Delta\varphi$ の間にある電流素片 $Ia\Delta\varphi\vec{t}$ が作る磁束密度 $\Delta\vec{B}$ について考える。ここで，$\vec{t}$ は $\vec{r'}$ における電流の向きの単位ベクトルである。空間上の任意の位置 $\vec{r}$ に生じる磁束密度 $\Delta\vec{B}$ に関するビオ-サバールの法則を書け。

(2) z 軸上の位置 $\vec{r} = (0, 0, z)$ における磁束密度 $\Delta\vec{B}$ の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

(3) 問 (2) の結果から，円電流全体が位置 $\vec{r} = (0, 0, z)$ に作る磁束密度 $\vec{B}$ の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

[3]

温度Tの熱浴と熱平衡状態にある1個の2次元調和振動子について考える。振動子は，x, y方向に独立に固有角振動数ωで振動するとして，以下の問いに答えよ。プランク定数hに対し$\hbar = h/(2\pi)$，ボルツマン定数をk_{B}とする。

(1) 固有状態の量子数n_x，n_yを用いて，エネルギー固有値E_{n_x,n_y}を書け。

ここで，$n_i = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ $(i = x, y)$である。

(2) 2つの自由度が独立であることに注意して，分配関数Zが次の式で表されることを示せ。

$$Z = \left[2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)\right]^{-2}$$

ここで，

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

である。また，必要であれば，以下の公式を用いよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

(3) 内部エネルギーUを計算せよ。

(4) 以下の近似式を用いて，十分高温でのUを求めよ。また，得られた結果について，エネルギー等分配則の観点から簡潔に説明せよ。

$$\frac{\cosh x}{\sinh x} \sim \frac{1}{x} \qquad (x \ll 1)$$

ここで，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

である。

(5) エントロピーSを計算せよ。また，得られた結果が，熱力学第3法則を満たしていることを示せ。

[4]

質量 m の粒子が1次元ポテンシャル $V(x)$ の中を量子力学的に運動している。プランク定数 h に対し，$\hbar = h/(2\pi)$ として，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t における粒子の波動関数を $\psi(x,t)$ としたとき，時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \boxed{}$$

の右辺の四角に入る式を書け。

(2) n 番目のエネルギー固有値を E_n，その固有波動関数を $\phi_n(x)$ とするとき，時間に依存しないシュレーディンガー方程式 (固有値方程式) を書け。

次に，ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -L, \quad L < x \\ 0 & -L \leq x \leq L \end{cases}$$

で与えられる場合を考える。ここで，L は正の定数である。このとき，固有波動関数は，$-L \leq x \leq L$ において sin 関数あるいは cos 関数で表されるが，sin 関数に比例する奇関数を $\phi_n^o(x)$，cos 関数に比例する偶関数を $\phi_n^e(x)$ とする。また，それらの固有値をそれぞれ，E_n^o，E_n^e とする。以下の問いに答えよ。ただし，問 (4)(5)(6) は途中の計算過程も簡潔に示すこと。また，n は1から始まる自然数で，$\phi_n^o(x)$ と $\phi_n^e(x)$ は規格化されていて，実関数である。必要であれば，次の公式を用いても良い。

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

(3) $x = \pm L$ の時，$\phi_n^o(x)$ と $\phi_n^e(x)$ が満たす条件をそれぞれ書け。

(4) $-L \leq x \leq L$ では $V(x) = 0$ なので，固有波動関数の波数が定義できる。$\phi_n^o(x)$ と $\phi_n^e(x)$ のそれぞれについて波数を L と n で表せ。

(5) E_n^o，$\phi_n^o(x)$，および，E_n^e，$\phi_n^e(x)$ をそれぞれ求めよ。

(6) 時刻 t における粒子の波動関数を $\psi(x,t)$ とする。$t=0$ で

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^o(x) + \phi_1^e(x))$$

のとき，$t > 0$ での $\psi(x,t)$ を，必要な n に対する E_n^o，$\phi_n^o(x)$，および，E_n^e，$\phi_n^e(x)$ を用いて表せ。